Noções de Cálculo Variacional *

e aplicações para Física

Kelvyn Emmanoel †

1 Motivação

Cálculo Diferencial é o nome dado à disciplina que, entre outras coisas, trata dos problemas de otimização (procura de máximos e mínimos) de funções (escalares) definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entretanto, nem todos os problemas relevantes de otimização se limitam a este tipo de função. Um exemplo simples mas que foge do escopo do cálculo diferencial é o seguinte: dados dois pontos A e B de um plano, procuramos achar uma curva que os conecta e cujo comprimento seja o menor possível. Em outras palavras, se J é a função que a cada curva γ ligando os pontos A e B associa o seu comprimento, queremos achar uma curva específica tal que o valor:

$$J(\gamma) = \int_A^B ||\gamma'(t)||dt \tag{1}$$

seja o mínimo global (se existir).

Note a peculiaridade deste exemplo. Não estamos procurando um ponto x de $\mathbb{R}^n$ que minimize uma função do tipo $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nossa função J pode ser pensada ludicamente como uma "função canibal": ela "engole"outras funções (no caso, curvas), no sentido de que os elementos do domínio são por si próprios outras funções. Este tipo de função é conhecido como funcional (não confunda com funcional linear, de álgebra linear). Por falar em domínio, qual é o domínio de J?

Antes de tratarmos desta questão de forma mais aprofundada, darei um outro exemplo para fixar as ideias. Neste exemplo, em vez de analisarmos curvas de diferentes comprimentos, trataremos de curvas fechadas com comprimento fixo (por isso este problema costuma ser chamado de "problema isoperimétrico"). Dadas estas curvas, queremos achar aquela cuja área interior (não se esqueça que a curva é fechada) seja a maior possível. Neste caso, podemos chamar de A o funcional que a cada curva (apropriada ao problema) associa o valor de sua área.

Em ambos os exemplos apresentados, as funções J e A associam números a certos tipos de curvas. Nada mais natural que pensar em seus domínios como um conjunto de curvas, que nada mais são que funções de uma variável real tomando valores em $\mathbb{R}^n$, então nosso domínio é um conjunto de funções. Um nome popular para este tipo de conjunto é "espaço de funções"[tipicamente estes conjuntos formam espaços vetoriais de maneira bastante natural, principalmente os casos de interesse].

À primeira vista, pode ser estranho pensar num conjunto assim, mas não se incomode: há conjuntos muito mais bizarros na matemática. É comum pensarmos em elementos de um conjunto como "pontos". Pois bem, é conveniente se acostumar a pensar em uma função como um ponto em um espaço maior (a razão para isso ficará mais clara posteriormente). Um exemplo é o espaço de todas as funções contínuas de um certo intervalo fechado $[a, b]$ em $\mathbb{R}$, que costuma ser denotado por $\mathcal{C}([a, b])$. As funções adequadas para o nosso primeiro problemas são as curvas planas que começam em A e terminam em B. No segundo exemplo, o conjunto apropriado seria o de curvas fechadas de comprimento l fixado. Em geral, costumamos pedir condições mais específicas de regularidade, por exemplo pedir que as funções sejam contínuas, diferenciáveis ou de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pedir funções de classe $\mathcal{C}^1$ já é o suficiente para estes exemplos.

É óbvio que há muitas diferenças entre estes conjuntos e o $\mathbb{R}^n$, mas uma diferença essencial é que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é finita, enquanto que a dimensão de um espaço (vetorial) de funções é tipicamente infinita. [Não iremos nos ater a estes detalhes, mas é fácil mostrar, por exemplo, que o espaço de todos os polinômios não tem dimensão finita. O conjunto das funções x^n está contido neste espaço e é linearmente independente, para n em qualquer subconjunto finito dos naturais. Além disso, o espaço dos polinômios é subespaço do espaço vetorial das funções analíticas, das funções contínuas, das funções Lebesgue-integráveis, etc, donde estes outros espaço também não possuem dimensão finita]. É lógico que

*Os pré-requisitos recomendados para um bom aproveitamento destas notas são: uma boa base de cálculo diferencial de várias variáveis e noções de álgebra linear. Irei me esforçar para que seja necessário o mínimo possível. Algumas partes exigirão maiores conhecimentos, mas são dispensáveis para o andamento da leitura e serão demarcadas por colchetes "[]"

†Estas notas foram inspiradas pelo curso de Cálculo Variacional da II Escola de Inverno de Física Teórica "Jaime Tiomno" (IF-USP), ministrado pelo Prof. Dr. Daniel V. Tausk (IME-USP) em Julho de 2019

os conjuntos que citamos não são os únicos em que se pode estudar problemas de otimização, mas o Cálculo Variacional pode ser pensado justamente como a extensão do cálculo diferencial para espaços de dimensão infinita.

Não precisa ser um gênio para saber que a curva de menor comprimento euclidiano que liga dois pontos é uma reta, mas este exemplo pode facilmente ser modificado e dar origem a problemas variacionais extremamente complicados (e muitíssimo interessantes). No lugar de um plano, podemos considerar uma superfície qualquer em $\mathbb{R}^3$, por exemplo [ou uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$, de forma mais geral]. A este problema damos o nome de "Problema da Geodésica"e será tratado na seção 6. Outro problema, muito relevante do ponto de vista histórico, é o chamado "Problema da Braquistócrona". Ele consiste em achar uma curva ligando dois pontos A e B tal que um corpo liberado a partir do repouso e sujeito a uma força constante (como a da gravidade) "escorregue"pela curva no menor tempo possível (braquistócrona em grego significa "o tempo mais curto"). Em outras palavras, buscamos o formato do escorregador ou rampa que minimiza o tempo de escorregamento. Note que, apesar de parecer à primeira vista, uma reta não seria uma boa solução, já que não estamos mais interessados em achar o comprimento mínimo, mas sim o tempo mínimo.

Qual seria o funcional T que a cada curva γ adequada ao problema associa o tempo da queda sobre por esta curva? Para escrever T, façamos algumas considerações. Primeiramente, suponhamos que a queda ocorre em um plano e coloquemos um sistema de coordenadas neste plano tal que $A = (0, 0)$ e $B = (x_1, y_1)$, $x_1, y_1 > 0$, de forma que o eixo das ordenadas aponte na mesma direção da força da gravidade. Sejam $m, g \in \mathbb{R}$ respectivamente a massa do corpo e a norma da aceleração gravitacional, suposta constante nas proximidades da superfície da Terra. Então $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (0, mg)$ será o campo vetorial constante associado à força peso. Suponhamos também que a curva seja o gráfico de uma função $f : [0, x_1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $x > 0 \implies f(x) > 0$. Isto é, $\gamma(t) = (x(t), f(x(t)))$. O espaço de funções considerado neste exemplo é $X = \{f : [0, x_1] \to \mathbb{R}, f \text{ de classe } \mathcal{C}^1, f(0) = 0, f(x_1) = y_1, x > 0 \implies f(x) > 0\}$.

Agora, o funcional T pode ser obtido através da conservação da energia. Temos que a energia cinética em um instante t é $\frac{1}{2}m||\gamma'(t)||^2 = \frac{1}{2}m(x'(t)^2 + f'(x(t))^2 x'(t))$, onde a igualdade veio pela regra da cadeia. A energia potencial, por sua vez, é $-mgy = -mgf(x(t))$ (o sinal de menos aparece porque nosso eixo y está apontando para baixo). Note que a energia total no instante inicial é zero (o corpo parte do repouso a partir da altura zero). Pela lei de conservação da energia mecânica, temos que a energia será zero em todos os instantes de tempo. Isto é:

$$\frac{1}{2}m(x'(t)^2 + f'(x(t))^2 x'(t)) - mgf(x(t)) = 0$$

$$\iff \frac{1}{2}x'(t)^2(1 + f'(x(t))^2 = gf(x(t))$$

$$\iff x'(t) = \sqrt{\frac{2gf(x(t))}{1 + f'(x(t))^2}}$$

Pelo teorema da função inversa, para t tal que $x'(t) \neq 0$, teremos:

$$t'(x) = \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2gf(x)}}$$

Além disso:

$$T(f) = t(x_1) - t(0) = \int_0^{x_1} t'(x)dx$$

Sendo a última igualdade proveniente do Teorema Fundamental do Cálculo. Donde vemos que nosso funcional $T : X \to \mathbb{R}$ deve ser dado por:

$$T(f) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{2gf(x)}}dx \tag{2}$$

2 Lagrangiana

Note que, nos nossos dois exemplos, o funcional foi dado por uma integral (equações 1 e 2). Mais que isso, em (1) o integrando dependia da derivada de γ e em (2) o integrando dependia de f e sua derivada f'.

De fato, muitos problemas variacionais dos mais relevantes possuem funcionais dados por uma integral cujo integrando pode ser escrito em termos de uma função f e sua derivada de primeira ordem f'. Podemos generalizar um pouco mais e permitir que o integrando também dependa de x, a variável independente da função f. Isto não aconteceu nos nossos exemplos.

A dependência do integrando em relação a três coisas (x, f, f') pode ser explicitada escrevendo o integrando como uma função L de três variáveis reais. L seria uma função do tipo $(a, b, c) \mapsto L(a, b, c)$. Esta função, a princípio, possui variáveis independentes, mas dada uma função f, o funcional será dado pela integral desta função calculado em um ponto (a, b, c) específico, o ponto $(a, b, c) = (x, f(x), f'(x))$. A partir do momento em que a função L é calculada neste ponto, ela "se torna"uma função de uma variável x (no fundo ocorre uma composição de funções). Em outras palavras, muitos problemas variacionais dos mais relevantes possuem a seguinte forma:

$$J(f) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, f(x), f'(x))dx \tag{3}$$

A função L é chamada de *Lagrangiana.*

Suponhamos que a curva γ no exemplo da curva de comprimento mínimo fosse da forma $\gamma(t) = (t, f(t))$, para facilitar. Então $||\gamma'(t)|| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}$. Assim nossa lagrangiana seria:

$$L(a, b, c) = \sqrt{1 + c^2} \tag{4}$$

No exemplo da braquistócrona, nossa lagrangiana era a função dada por:

$$L(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1 + c^2}{b}} \tag{5}$$

Funcionais escritos dessa forma são de fato muito gerais e, na física, praticamente todos são assim (com exceção da relatividade geral - sempre tem uma exceção). Apesar disso, é importante ter em mente que pode haver funcionais completamente diferentes, sem nem mesmo serem dados por uma integral, por exemplo.

Sem mais delongas, vamos iniciar a jornada pela busca dos máximos e mínimos de funcionais!

3 Pontos Críticos em Dimensão Infinita

Em geral, um ponto crítico pode ser pensado como um ponto "suspeito"de ser de máximo ou mínimo. Assim como no crime, nem todo suspeito é bandido, mas é muito bom se o bandido estiver na lista de todos os suspeitos. Assim, todo ponto de máximo ou mínimo é ponto crítico[1], mas nem todo ponto critico é de máximo ou mínimo (formalmente, ser ponto crítico é uma condição necessária mas não suficiente). A quantidade de "suspeitos"deve ser grande o suficiente para garantir com certeza que o bandido esteja entre eles mas não tão grande para tornar o processo investigativo inviável (por exemplo, tomar todos os pontos do domínio como pontos críticos seria uma maluquice, pois teríamos de analisar, em geral, infinitos pontos para acharmos máximos, não ajudaria em nada). Por isso, uma boa definição de ponto crítico é necessária. Em dimensão infinita, iremos fazer um processo bastante análogo ao processo em dimensão finita, por isso convém recordarmos algumas partes do processo.

Relembremos que, para funções de uma variável real, achar os pontos críticos significava derivar a função e igualar o resultado a zero. Para funções de mais de uma variável, o processo não era mais tão simples. Em parte, porque um ponto podia ser de máximo (ou mínimo) se a função fosse analisada em uma certa direção a partir desse ponto mas não ser em outra. Por exemplo, a função $f(x, y) = y^2 - x^2$ possui um ponto $(0, 0)$ que é de mínimo na direção y e ao mesmo tempo de máximo na direção x. Um ponto assim é conhecido como ponto de sela (pesquise o gráfico desta função, de fato se parece com uma sela de cavalo! Esta figura se chama "paraboloide hiperbólico"). Para expressar derivadas ao longo de direções específicas, tínhamos as chamadas "derivadas direcionais". Dada uma função f definida num aberto de $\mathbb{R}^n$, um ponto x do domínio de f e uma direção representada pelo vetor $\vec{v}$, a derivada direcional de f na direção $\vec{v}$ calculada no ponto x é definida como:

$$\frac{df}{d\vec{v}}(x) := \lim_{s \to 0} \frac{f(x + s\vec{v}) - f(x)}{s} \tag{6}$$

No fundo, esta definição diz que estamos perturbando o ponto x um pouquinho na direção de $\vec{v}$. Esta perturbação é dada por uma reta ($x + s\vec{v}$ é a parametrização de uma reta). Note que se definirmos a função g de uma variável como $g(s) = f(x + s\vec{v})$, então valeria que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x) = \frac{d}{ds}g(s)\big|_{s=0} \tag{7}$$

[1] Todo bom aluno de Cálculo I sabe que esta afirmação não é bem verdadeira... Pontos não diferenciáveis ou que estejam na fronteira do domínio podem ser pontos de extremos sem serem pontos críticos. Ao longo de todo o texto assumiremos que todos as funções são diferenciáveis e que estão definidas num aberto, isto é, o domínio não tem ponto de fronteira.

Que nos faz recair no caso unidimensional.

Poderíamos nos perguntar o que aconteceria se avaliássemos a taxa de variação da f em uma curva qualquer, em vez de apenas retas. Quando a função não é patológica (ser diferenciável basta), avaliar a taxa de variação em curvas não acrescente nenhuma informação nova. De fato, seja γ uma curva qualquer que passa pelo ponto x em $s = 0$ (sem perda de generalidade, pois ela pode ser reparametrizada). Assim como quando a curva era uma reta, fazendo a composição de funções, definimos $g \coloneqq f(\gamma(s))$ (antes, $\gamma = x + s\vec{v}$ e $g \coloneqq f(\gamma(s)) = f(x + s\vec{v})$), vamos obter:

$$\frac{d}{ds}g(s)\big|_{s=0} = \frac{\partial f}{\partial(\gamma'(0))}(x) \tag{8}$$

(para provar isso se usa a regra da cadeia). A derivada do lado direito da igualdade é uma derivada direcional, não se esqueça que $\gamma'(0)$ é um vetor. Trocando em miúdos: se f é diferenciável, avaliar a taxa de variação em x por uma curva qualquer, é a mesma coisa de fazer a derivada direcional de f em x usando como direção o vetor tangente da curva neste ponto ($\gamma'(0)$)

Chamamos de ponto crítico um ponto em que *todas* as derivadas direcionais são nulas. Usando esta definição, vale que todo ponto de máximo ou mínimo é um ponto crítico (como gostaríamos).

Assim como funções de uma variável, funções de várias variáveis também possuem critérios suficientes para achar extremos usando derivadas segundas (em várias variáveis, temos a Hessiana). Em dimensão infinita há coisas análogas, mas não iremos explorar muito isto.

Começaremos agora a desenvolver um procedimento para obter os pontos críticos de um funcional. Durante o desenvolvimento, traçaremos diversos paralelos com o problema em dimensão finita. O que foi feito foi basicamente realizar uma pequena perturbação no ponto x, indexada por um parâmetro s. Faremos o mesmo, mas agora nosso ponto x não estará mais em $\mathbb{R}^n$, e sim num espaço de funções. Substituiremos a letra x por f para indicar que agora se trata de uma função. Indicaremos por $(f_s)_{s\in I}$ uma curva no espaço de funções. Não se intimide com este nome. A ideia por trás de uma "curva no espaço de funções"é a seguinte: assim como γ era uma função que a cada s associava um ponto de $\mathbb{R}^n$, para cada $s \in I$, associaremos uma função f_s no nosso espaço de funções considerado. Fixado um s (e portanto uma função f_s), denotaremos por x a variável da função f_s. [Assim, a curva também pode ser pensada como uma função H de duas variáveis, s e x]. Daremos o nome de *variação* para esta curva. Como exemplo concreto, considere a seguinte variação da função $f(x) = x$: $f_s(x) = x + sx^2, s \in \mathbb{R}$. Assim, $f_1(x) = x + x^2$, $f_2 = x + 2x^2$, $f_\pi = x + \pi x^2$, etc.

Passemos às definições formais.

Definição 1. Seja D o conjunto das funções definidas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{R}^n$ e com extremos fixos y_0 e y_1 Isto é, $D = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}^n, f(a) = y_0 \text{ e } f(b) = y_1\}$. Dada uma $f \in D$, uma *variação* de f em D é uma família $(f_s)_{s\in I}$ com I um intervalo contendo $s = 0$ no seu interior, de modo que $f_0 = f$, $f_s \in D$, $\forall s \in I$ e a função $H(s, x) \coloneqq f_s(x)$ seja de classe $\mathcal{C}^2$ ($H : I \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$). ♣

A condição de que $f_0 = f$ é análoga à condição em dimensão finita de que a curva γ passasse por x em $s = 0$.

Agora que já definimos o que vem a ser uma pequena perturbação em torno de uma função (assim como γ era uma perturbação do ponto x), convém definirmos o análogo do vetor tangente à γ no ponto x. Antes, este vetor era um elemento de $\mathbb{R}^n$. Agora, ele será um elemento de D, isto é, uma função. Esta função será chamada de *campo variacional.*

Definição 2. Seja $H : I \times [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma variação. O campo variacional desta variação é a função $\vec{v} : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\vec{v}(x) \coloneqq \frac{\partial}{\partial s}H(s, x)\big|_{s=0} = \frac{d}{ds}f_s(x)\big|_{s=0}, \forall x \in [a, b] \tag{9}$$

♣

Note a semelhança entre estas definições e suas análogas em Cálculo Diferencial. Assim como em dimensão finita, acabamos de definir nosso "vetor tangente"(campo variacional) como a derivada de uma "curva"(variação) com relação ao seu parâmetro s, calculada em $s = 0$.

Agora já podemos ter uma ideia do que serão os pontos críticos. Os pontos críticos do funcional J serão os pontos $f \in D$ tal que a taxa de variação de J no ponto f será nula para qualquer "direção", ou melhor, para qualquer campo variacional.

Antes de continuar falando sobre os pontos críticos, façamos algumas observações. Para fixar as ideias, consideremos a tabela abaixo relacionando os conceitos em dimensão finita e infinita.

Espaço de Funções	$\mathbb{R}^n$
função f	ponto $x \in \mathbb{R}^n$
variação $H(s,x)$ $(= f_s(x))$	curva $\gamma(s)$ $(= x_s)$
campo variacional: $\vec{v}(x) = \frac{d}{ds} f_s(x)\big\|_{s=0}$	vetor tangente: $\vec{v} = \gamma'(0) = \frac{d}{ds} x_s(x)\big\|_{s=0}$

Como estamos supondo os extremos fixos:

$$f_s(a) = y_0; f_s(b) = y_1, \forall s \in I$$

As funções $f_s(a)$ e $f_s(b)$ são constantes em s, e segue que a derivada com relação a s é nula:

$$\frac{d}{ds} f_s(a) = \frac{d}{ds} f_s(b) = 0$$

E, pela definição de campo variacional (9), as igualdades acima significam o mesmo que dizer que $\vec{v}(a) = \vec{v}(b) = 0$. Em outras palavras, todo campo variacional é nulo nas extremidades. Mas será que vale a recíproca? Isto é, será que qualquer função $\vec{v} : [a,b] \to \mathbb{R}$ com $\vec{v}(a) = \vec{v}(b) = 0$ é o campo variacional de alguma variação? A resposta é sim! Basta tomarmos a variação: $f_s(x) = f(x) + s\vec{v}(x)$ (derive esta f_s em relação a s e cheque a afirmação). Uma variação desta forma é análoga a uma reta em dimensão finita.

Agora que já temos nosso "ponto", nossa "curva"e nosso "vetor tangente", estamos com a faca e o queijo na mão para definirmos uma "derivada direcional"no espaço de funções. Se não estiver claro a importância desta definição, pense no papel da derivada direcional para o caso de dimensão finita.

Definição 3. Seja $J : D \to \mathbb{R}$ um funcional. A derivada direcional de J no ponto f com relação ao campo variacional $\vec{v}$ é definido como:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \frac{d}{ds} J(f_s)\big|_{s=0} \tag{10}$$

♣

Note que a composição $h(s) \coloneqq J(f_s)$ é uma função de I em $\mathbb{R}$. Iremos recair no caso unidimensional! Agora, suponhamos que f seja um máximo ou mínimo de J. Então:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \frac{d}{ds} J(f_s)\big|_{s=0} = \frac{d}{ds} h(0) = 0, \forall \vec{v}$$

A última igualdade veio do fato de que $h(0) = J(f)$ é um ponto de máximo ou mínimo da função h, por hipótese. (supomos que f é um ponto de máximo ou mínimo do domínio de J, em particular, é um ponto de máximo ou mínimo da família de funções $(f_s)_{s \in I}$, isto é, $s = 0$ é o valor de s onde $S(f_s)$ é um extremo, logo, $s = 0$ é ponto de máximo ou mínimo de h).

O que acabou de ser visto nos leva a concluir que se definirmos *ponto crítico* como uma função cuja derivada direcional é nula para todos os campos variacionais, obteremos novamente o fato de que "ser um ponto crítico é condição necessária para uma função ser ponto de máximo ou mínimo"(neste caso) de um funcional. (entendeu porque convém pensarmos em funções como pontos?) A princípio, pode parecer reconfortante termos conseguido reduzir um problema de dimensão infinita para uma dimensão apenas, mas logo este alívio some, ao darmos conta de que teríamos de testar todos os campos variacionais (tipicamente, um número infinito deles) para acharmos os pontos críticos.

Acontece que, em casos mais específicos, como quando o funcional possui a forma (3) (felizmente os casos de interesse na Física), há um truquezinho que nos permite fugir deste problema, e achar um critério que independe do campo variacional. Este critério é a...

4 Equação de Euler-Lagrange

Nesta seção iremos tratar de problemas variacionais específicos. Em primeiro lugar, nos restringiremos a funcionais que possam ser escritos como (3), na qual a lagrangiana $L : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, U aberto tal que $(x, f(x), f'(x)) \in U$, $\forall x \in [a,b]$, é uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Além disso, nosso espaço de funções D também será restringido para conter funções de classe $\mathcal{C}^1$ com condição de contorno $f(a) = y_0$ e $f(b) = y_1$, sendo y_0, y_1 números reais dados.

Antes de continuarmos, convém esclarecermos como serão denotadas as derivadas parciais da função L. Derivadas parciais costumam ser indicadas chamando cada entrada da função por x, y, z ou $1, 2, 3$.

(por exemplo, $\frac{\partial L}{\partial x}$ ou $\partial_1 L$). Entretanto, a utilidade de dar nomes para entradas ou variáveis é justamente de que estes nomes possam nos lembrar do que estamos falando. Em virtude disso, daremos como nome às nossas variáveis: x, f, f'. Apesar de ser útil como recurso mnemônico, esta notação tem o potencial de causar uma certa confusão pois, ora f indicará uma variável, ora indicará uma função. Peço que o leitor fique atento para não se confundir. A notação $\frac{\partial L}{\partial f}$ não tem nada de místico: não é a derivada de uma função com relação a outra função nem nada do gênero, é simplesmente a derivada parcial da função L em relação à sua segunda variável. O símbolo " $'$ "sempre irá indicar derivada com relação a x.

Considere uma variação f_s de f com campo variacional $\vec{v}$. Temos:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \frac{d}{ds}\int_a^b L(x, f_s(x), f_s'(x))dx\big|_{s=0}$$

Neste caso podemos colocar a derivada em s para dentro da integral. Usando a regra da cadeia:

$$\implies \frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \int_a^b \frac{d}{ds}[L(x, f_s(x), f_s'(x))]dx\big|_{s=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(x, f_s(x), f_s'(x))\frac{d}{ds}x + \frac{\partial L}{\partial f}(x, f_s(x), f_s'(x))\frac{d}{ds}f_s(x) + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f_s(x), f_s'(x))\frac{d}{ds}f_s'(x)dx\big|_{s=0}$$

Como x não depende de s, $dx/ds = 0$, e o primeiro termo é cancelado. Usando a definição de campo variacional em (9) podemos fazer uma substituição no segundo termo. Além disso, podemos notar que:

$$\frac{d}{ds}f_s'(x)\big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dx}f_s(x)\right)\big|_{s=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{ds}f_s(x)\big|_{s=0}\right) = \frac{d}{dx}v(x) = v'(x)$$

Onde usamos o Teorema de Clairaut-Schwarz na segunda igualdade. Com estas observações, ficamos com:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}(x, f(x), f'(x))v(x) + \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v'(x)dx$$

Está lembrado que comentamos que a derivada direcional em dimensão finita não dependia da curva, somente do vetor tangente à curva no ponto onde estávamos analisando (equação 8)? Chegamos num resultado análogo! $\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f)$ não depende da variação f_s, somente do campo variacional $v(x)$ (e das derivadas da lagrangiana). Mas ainda não acabamos... No fundo, queremos uma dependência apenas em v, não em v'. Iremos transferir a derivada do v para o outro termo que ele está multiplicando, através de um truque... Veja que:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v(x)\right) = \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v'(x) + \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))\right]v(x)$$

$$\implies \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v(x)\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))\right]v(x)$$

Conseguimos reescrever o termo com v' como a subtração de termos sem v'. O truque foi a regra do produto. Realizando a substituição, obtemos:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial f}(x, f(x), f'(x))v(x) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))\right]v(x)dx + \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v(x)\right)dx$$

(separamos a integral em duas) Note que, pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v(x)\right)dx = \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))v(x)\big|_a^b$$

$$= \frac{\partial L}{\partial f'}(b, f(b), f'(b))v(b) - \frac{\partial L}{\partial f'}(a, f(a), f'(a))v(a)$$

Como $v(a) = v(b) = 0$, estes termos se cancelam, e resultamos no seguinte:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))\right]\right)v(x)dx$$

No caso de f ser um ponto crítico, a equação acima será sempre igual a zero, como havíamos dito. Ou seja, f ponto crítico significa que:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \right] \right) v(x)dx = 0, \forall v(x) \tag{11}$$

[Se lembrarmos que o produto interno usualmente definido num espaço de funções é dado por $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ (como no espaço L_2), a equação acima está dizendo que o termo entre parênteses é ortogonal a todo $v(x)$]

Já conseguimos deixar $v(x)$ em evidência dentro da integral, e isto é quase o que precisamos para nos livrarmos do problema de termos de analisar todos os campos variacionais. Para concluirmos só falta o *Lema Fundamental do Cálculo das Variações*:

Lema 1. *(Lema Fundamental do Cálculo das Variações) Seja $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se:*

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = 0 \tag{12}$$

para todo $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ com $v(a) = v(b) = 0$, então $u = 0$ □

Note que há mais funções contínuas do que funções de classe $\mathcal{C}^\infty$, então, se no lema pedíssemos que v fosse apenas contínua, estaremos pedindo que a integral fosse zero para um "maior número"de casos, o que tornaria o lema menos geral. Ou seja, pedir que v seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ torna o lema mais geral, e não menos geral: "só"precisamos que a integral se anule num número menor de casos. De fato, a demonstração utilizando v contínua é muitíssimo mais simples. A versão que é enunciamos não será demonstrada aqui. Como consequência direta do Lema chegamos na seguinte equação:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \right] = \frac{\partial L}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) \tag{13}$$

Conhecida como *Equação de Euler-Lagrange*. (só igualamos o integrando de (11) a zero, como resultado do lema, e passamos um termo para o outro lado da igualdade). Finalmente temos um critérios para achar pontos críticos que não depende de $v(x)$! Mas... nem tudo são flores. A equação de Euler-Lagrange dá origem a uma equação diferencial, cuja função incógnita é f, e aí o problema passa a se tornar tão mais difícil quanto for a equação diferencial (pode ser impossível achar uma solução analiticamente, etc). De qualquer forma, os pontos críticos do nosso funcional J serão as soluções da equação diferencial originada pela equação de Euler-Lagrange.

A equação escrita deste jeito é um pouco grande. Costuma-se escrever com a forma abreviada:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{\partial L}{\partial f}$$

Mas cuidado! Apesar desta abreviação ser mais cômoda, pode gerar um mal-entendido. Observe que:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'} \neq \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial f'}$$

Escrito sem abreviação:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \right] \neq \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial f'}(x, f(x), f'(x))$$

No primeiro deles, fazemos a derivada de L com relação a terceira variável (que tínhamos chamado de f'), que irá resultar numa função de três variáveis. Calculamos então o resultado desta função no ponto $(x, f(x), f'(x))$, que resultará numa função de apenas uma variável x. Aí sim fazemos a derivada com relação a x. Será uma derivada total (por isso d/dx e não $\partial/\partial x$). No segundo membro, por outro lado, fazemos duas derivadas em seguida, com relação à primeira e terceira variável, e por último calculamos no ponto $(x, f(x), f'(x))$. Lembre-se que nos nossos exemplos, L não dependia de x. Isto é, frequentemente, a derivada parcial de L com relação a x é zero, ou seja, o segundo membro da desigualdade costuma ser zero. Podemos abrir o primeiro membro pela regra da cadeia e obteremos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \right] = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial f'}(x, f(x), f'(x)) + \frac{\partial^2 L}{\partial f \partial f'}(x, f(x), f'(x))f'(x) + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial f'^2}(x, f(x), f'(x))f''(x)$$

O segundo membro aparece como uma componente do primeiro, mas, mais uma vez, não são iguais.

Agora que já temos a equação de Euler-Lagrange, vamos aplicá-la em um exemplo simples para fixar as ideias:

Exemplo. (Oscilador Harmônico) Seja $J : D \to \mathbb{R}$ o funcional definido por:

$$J(f) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx$$

Onde a função $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $L(x, f, f') = f'^2 - f^2$. Ache as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sob a condição de contorno $f(a) = y_0$, $f(b) = y_1$ e que sejam pontos críticos do funcional J.

Basta usarmos a equação de Euler-Lagrange. Pela lagrangiana que nos foi dada:

$$\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f, f') = 2f' \implies \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) = 2f'(x)$$

$$\implies \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))\right] = 2f''(x)$$

E também:

$$\frac{\partial L}{\partial f}(x, f, f') = -2f \implies \frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) = -2f(x)$$

Chegamos então na seguinte equação diferencial:

$$2f''(x) = -2f(x) \iff f''(x) + f(x) = 0$$

Esta é a equação do oscilador harmônico ~~que você tem a obrigação de saber~~. De fato, este problema foi pensado com o propósito de gerar uma equação diferencial cuja solução geral seja fácil de ser escrita (apesar de corresponder a um problema físico real. Espere até a próxima seção para mais detalhes), a saber:

$$f(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Onde as constantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições inicias, conforme mostramos abaixo:

$$\begin{cases} c_1 \cos(a) + c_2 \sin(a) = y_0 \\ c_1 \cos(b) + c_2 \sin(b) = y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Ressaltamos que o teorema de existência e unicidade de equações diferenciais vale para o caso onde as condições iniciais são o valor em um ponto e a derivada no mesmo ponto. Caso sejam dados dois pontos distintos, a solução nem sempre existe e nem sempre é única, quando existe. De fato, analisando este sistema de equações vemos que o determinante da primeira matriz é $\sin b \cos a - \sin a \cos b = \sin(b - a)$. Isto é, se $b - a$ for múltiplo inteiro de π, a solução poderá inexistir ou não ser única.

Poderíamos parar por aqui a análise do nosso problema, mas muitas pessoas possuem o mal-entendido de que as soluções da Equação de Euler-Lagrange são sempre mínimos, o que é falso (este tópico será retomado na próxima seção). Para desfazer o mal-entendido de uma vez por todas, vamos aproveitar este exemplo e abrir uma exceção, fazendo uma análise com critério de derivada segunda a fim exibir um exemplo de f que não é ponto de mínimo. Utilizar tal critério é possível pois já temos um método de recairmos para o problema em uma dimensão. Queremos calcular o seguinte:

$$\frac{d^2}{ds^2} J(f_s)\Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{d^2}{ds^2}[f_s'^2(x) - f_s^2(x)]dx\Big|_{s=0}$$

Diferentemente do que foi feito no caso de uma derivada, não será possível calcular a segunda derivada sem definir uma variação específica. Isto porque teremos que derivar duas vezes antes de substituir $s = 0$, mas só fazendo esta substituição achávamos uma fórmula em termos de $v(x)$, que nos permitia manipular melhor o problema. Caso tentemos calcular as derivadas como estão acima, não conseguiremos achar uma expressão fechada para a primeira derivada em termos de s (antes conseguímos pois colocávamos $s = 0$), daí não conseguiremos fazer a segunda derivada (teste!). Para contornar este problema, teremos de usar uma variação específica. Mas haverá perda de generalidade? A resposta é não. Pense em dimensão finita: para um ponto ser de mínimo local, ele o teria de ser considerando todas as direções. Para um ponto não ser mínimo basta achar uma direção (ou no nosso caso, campo variacional) em que ele não seja.

Analisaremos as variações do tipo $f_s = f + sv$. Isso nos dá:

$$\frac{d}{ds} J(f_s) = \frac{d}{ds} \int_a^b [(f'(x) + sv'(x))^2 - (f(x) + sv(x))^2]dx$$

$$\implies \frac{d}{ds}J(f_s) = 2\int_a^b (f'(x)+sv'(x))v'(x) - (f(x)+sv(x))v(x)dx$$

$$\implies \frac{d^2}{ds^2}J(f_s) = 2\int_a^b v'^2(x) - v^2(x)dx$$

Vamos agora estudar o sinal desta expressão. Usando o truque da regra do produto, confira que:

$$2\int_a^b v'^2(x) - v^2(x)dx = 2\int_a^b \frac{d}{dx}\left(v'(x)v(x)\right) - v''(x)v(x) - v^2(x)dx$$

Usando o teorema fundamental do cálculo e lembrando que v se anula nos extremos, podemos cancelar o primeiro termo da integral. Nos sobra:

$$\frac{d^2}{ds^2}J(f_s) = 2\int_a^b -v''(x)v(x) - v^2(x)dx = -2\int_a^b (v''(x)+v(x))v(x)dx$$

Caso exista algum campo variacional que se anule nos extremos e tal que satisfaça a equação diferencial: $v''+v = kv$, $k>0$ constante, teremos:

$$\frac{d^2}{ds^2}J(f_s) = -2k\int_a^b v^2(x)dx$$

O integrando é positivo para todo $x \in [a,b]$, donde a integral também é. Mas a integral está sendo multiplicada por uma constante negativa, e concluiremos que $\frac{d^2}{ds^2}J(f_s) < 0$.

Caso $b-a > \pi$, um campo variacional v satisfazendo estas condições vai existir. Tome $v(x) = \sin(\omega x + \theta)$ tal que $v(a) = v(b) = 0$ e $0 < \omega < 1$. De fato, escolhendo um v assim:

$$v'' = -\omega^2 \sin(\omega x+\theta) \iff v'' = -\omega^2 v$$

Definindo $k = 1-\omega^2$ (que é positivo pois $0<\omega<1 \implies -1 < -\omega^2 < 0 \implies 0 < 1-\omega^2 < 1$), chegaremos em:

$$v'' = (k-1)v \iff v''+v = kv$$

Como gostaríamos. Note que $g(s) = J(f_s)$ tem a primeira derivada nula em $s=0$ e a segunda negativa, no mesmo ponto, donde $g(0)$ é um ponto de máximo na "direção"de v. Já sabemos que há pontos críticos do funcional que não são mínimos. (De fato, f será um ponto de sela, basta fazer um procedimento análogo e será possível obter um campo variacional tal que a segunda derivada de $J(f_s)$ dê positiva). [2]

Antes de entrarmos no próximo assunto (Mecânica Clássica), precisamos provar uma versão um pouco mais geral da equação de Euler-Lagrange, para funções com contradomínio em $\mathbb{R}^n$. Isto não aumenta consideravelmente o nível de dificuldade, e o processo é essencialmente o mesmo. Optamos por realizar o caso menos geral primeiro por questões didáticas. (Para quem não está acostumado a manipular funções com este contradomínio, basicamente iremos separar todas as funções em funções coordenadas e a regra da cadeia dará um somatório no integrando, sobre todas as coordenadas. No final provaremos uma versão um pouco diferente do Lema 1 que nos permitirá separar a somatória em n equações de Euler-Lagrange. Caso você se perca no processo, encorajo que não desista: aceite o resultado e pule para a próxima seção, terá coisas interessantes lá).

Seja D o espaço das funções $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ com extremos fixos $f(a) = y_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(b) = y_1 \in \mathbb{R}^n$ e $J : D \to \mathbb{R}$ um funcional da forma (3).

Note que, agora, cada função $f \in D$ pode ser escrita como n funções coordenadas, cada uma tomando valores nos reais. Os elementos de D poderão ser denotados por $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$. O mesmo ocorre com as derivada: $f' = (f_1', ..., f_n')$. A lagrangiana, portanto, terá um número maior de variáveis. A variável f se tornará n variáveis f_i e f' se tornará n variáveis f_i'. A variável independente x permanecerá alterada, assim teremos $1+n+n$ variáveis. O domínio será então um subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Resumindo, a lagrangiana do funcional deverá ser dada por uma função $L : U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, U aberto e $(x, f(x), f'(x)) \in U$, $\forall x \in [a,b]$. Contudo, não iremos escrever explicitamente as $2n+1$ variáveis da lagrangiana. Usaremos a seguinte abreviação: $L(x,f,f') = L(x, f_1, ..., f_n, f_1', ..., f_n')$.

As variações e os campos variacionais também tomarão valor em $\mathbb{R}^n$, sendo denotados por $f_s = (f_{s_1}, ..., f_{s_n})$ e $v = (v_1, ..., v_n)$. Ainda vale que $f_{s_i}(a) = f_{s_i}(b) = 0$ e $v_i(a) = v_1(b) = 0, \forall i$.

[2][A Hessiana de J é $\int_a^b (-v''-v)vdx$. A análise completa se faz diagonalizando o operador $-v''-v$, definido no espaço dos v tais que $v(a) = v(b) = 0$. A base ortonormal de autovetores vai ser formada por senos, de forma a escrever um v qualquer como uma série de Fourier. A determinação de máximo e mínimos se faz estudando o espectro deste operador.]

O processo será feito de forma mais rápida, sem tantos detalhes ou explicações, pois será bem parecido com o que já foi feito. Abaixo colocamos a derivada para dentro da integral e usamos a regra da cadeia. O termo dependente de x já foi cancelado. E a derivada já foi calculada no ponto $s = 0$:

$$\frac{\partial J}{\partial \vec{v}}(f) = \frac{d}{ds}S(f_s)\big|_{s=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f_i}(x, f(x), f'(x))v_i(x) + \frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))v_i'(x)\right] dx$$

Usando novamente a regra do produto, temos, para todo i entre 1 e n:

$$\frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))v_i'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))v_i(x)\right) - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))\right] v_i(x)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade novamente será cancelado devido ao teorema fundamental do cálculo e devido a condição de que $v_i(a) = v_i(b) = 0, \forall i$. Substituindo o resto da expressão na integral obtemos:

$$\frac{d}{ds}J(f_s)\big|_{s=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial f_i}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))\right)\right] v_i(x)dx$$

Note que $v_i(x)$ já foi colocado em evidência. Lembre-se que o produto escalar entre dois vetores $u = (u_1, ..., u_n)$ e $w = (w_1, ..., w_n)$ é dado por $u \cdot w = \sum_{i=1}^n u_i w_i$. A partir disso concluímos que o produto:

$$\left[\frac{\partial L}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}(x, f(x), f'(x))\right)\right] \cdot v(x)$$

É igual ao somatório do integrando, logo, podemos substituí-lo. (O primeiro termo do produto é o vetor tal que cada componente é a expressão dependente de i que estava dentro do somatório, lembre-se que, apesar de v ser uma função, seu valor calculado num ponto $v(x)$ é um vetor. O mesmo vale para o outro fator do produto interno). No caso de f ser um ponto crítico, esta integral será zero para todo $v(x)$. Isto é:

$$\frac{d}{ds}J(f_s)\big|_{s=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial f_i}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))\right)\right] \cdot v(x)dx = 0, \forall v$$

Já conseguimos colocar $v(x)$ em evidência. O que falta agora é um teorema análogo ao Lema 1, que na verdade é um corolário dele, enunciado a seguir:

Corolário 1. *Se* $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *é contínua e* $\int_a^b u(x) \cdot v(x) = 0$*, para todo* $v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *com* $v(a) = v(b) = 0$*, então* $u = 0$. □

Demonstração. Já que a integral se anula para todo $v(x)$, por hipótese, podemos pegar funções $v(x)$ que sejam nulas em todas as coordenadas, exceto na i-ésima. Assim, apenas o i-ésimo termo do somatório será diferente de zero e recairemos no caso do Lema 1, que nos permitirá provar que a i-ésima função coordenada é zero. Agora basta repetir para todos os i, de 1 a n. ■

No fundo, este corolário nos diz que cada coordenada do integrando deve ser igual a zero. Agora, não temos mais apenas uma equação, mas n equações, uma para cada i, idênticas a equação da versão unidimensional:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial L}{\partial f_i'}(x, f(x), f'(x))\right] = \frac{\partial L}{\partial f_i}(x, f(x), f'(x)), \forall i \in \{1, ..., n\} \tag{14}$$

Creio que agora chegou a hora de um breve esclarecimento. Toda a teoria desenvolvida até agora teve como objetivo achar máximos e mínimos de funcionais. Este é um objetivo interessante e bastante útil, mas as principais aplicações do Cálculo Variacional na física se resumem a buscar apenas os pontos críticos dos funcionais, sem se importar se são pontos de máximo, mínimo ou nenhum dos dois, por mais estranho que este objetivo possa parecer. A próxima seção será especialmente dedicada a isso, e nela, será explicado mais detalhadamente o papel do cálculo variacional para mecânica. A título de informação, saiba de antemão que as equações de movimento de um número n de corpos são justamente as soluções da equação de Euler-Lagrange para uma função lagrangiana específica.

5 Um pouco de Mecânica Clássica

Antes de mais nada, problemas variacionais aplicados a Mecânica Clássica possuem uma notação específica, usada em praticamente todos os textos. Por isso convém usarmos a mesma notação aqui. Nossa boa e velha função f passará a ser denotada por q e sua variável independente será t, no lugar de x. Também teremos $\dot{q}$ no lugar de f'.

Considere, então, uma partícula de massa $m > 0$ se movendo[3] pelo $\mathbb{R}^3$ sob a ação de um campo de forças $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ conservativo (isto é, F só depende da posição da partícula e existe uma função $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ chamada de função potencial tal que valha $F = -\nabla V$). Seja $q : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ a trajetória da partícula, isto é, q é a posição da partícula em função do tempo. A segunda lei de Newton nos garante que:

$$m\ddot{q}(t) = F(q(t)) \tag{15}$$

Onde dois pontos em cima de q simboliza a derivada segunda desta função (com relação ao tempo). A grande sacada do formalismo lagrangiano da mecânica clássica é perceber que esta equação diferencial acima é a equação obtida ao resolver a equação de Euler-Lagrange para uma função lagrangiana específica. Para diferenciar de uma função lagrangiana qualquer, iremos denotá-la por $\mathcal{L}$. Esta lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) := \frac{1}{2}m||\dot{q}||^2 - V(q) \tag{16}$$

Onde V é a função potencial da força F. Note que o primeiro termo é a energia cinética da partícula. Se denotarmos a energia cinética por T, obteremos a forma mais abreviada (e comum) da lagrangiana: $\mathcal{L} = T - V$. Não se esqueça que $q = (q_1, q_2, q_3)$ e $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$. Cada termo dentro dos parênteses é uma função coordenada de q e $\dot{q}$. Então o domínio de $\mathcal{L}$ é um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

O funcional obtido pela lagrangiana é chamado de funcional ação:

$$S(q) := \int_a^b \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))dt \tag{17}$$

Agora, vamos por a mão na massa e mostrar que as equações de movimento de Newton de fato são pontos críticos de S. Como estamos em três dimensões, teremos três equações de Euler-Lagrange do tipo (14). Se $i \in 1, 2, 3$, teremos, de um lado da equação:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(t, q(t), \dot{q}(t)) = m\dot{q}_i(t) \implies \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{q}_i(t)$$

(lembre-se que $||\dot{q}||^2 = \dot{q_1}^2 + \dot{q_2}^2 + \dot{q_3}^2$). Do outro:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(t, q(t), \dot{q}(t)) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}(q(t))$$

Considerando todos os i:

$$(m\ddot{q}_1(t), m\ddot{q}_2(t), m\ddot{q}_3(t)) = \left(-\frac{\partial V}{\partial q_1}(q(t)), -\frac{\partial V}{\partial q_2}(q(t)), -\frac{\partial V}{\partial q_3}(q(t))\right)$$

$$\iff m\ddot{q}(t) = -\nabla V(q(t))$$

Repare, porém, que $-\nabla V(q(t)) = F(q(t))$, pela definição de V, donde obtemos, finalmente, a segunda lei de Newton (15). Mostramos, portanto, que a trajetória de uma partícula é o ponto crítico do funcional ação. Na literatura, este fato é conhecido como "Princípio da Mínima Ação", mas este nome é incorreto, afinal já exibimos um contraexemplo na seção anterior. Um nome melhor, também usado, é "Princípio da ação estacionária"(ponto estacionário é sinônimo de ponto crítico). Você pode talvez pensar que o problema que exibimos não corresponde a uma situação física, mas, na verdade, aquela função "$f'^2 - f^2$"é precisamente a lagrangiana de um oscilador harmônico! Lembre-se que a energia cinética é $m\dot{q}^2/2$ e a energia potencial elástica é $kq^2/2$. A lagrangiana do oscilador harmônico é:

$$\mathcal{L}(t, q, \dot{q}) = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{kq^2}{2}$$

[3] Sinceramente, acho bem estranha esta expressão. O $\mathbb{R}^3$ é um objeto matemático (definido em termos de conjuntos e axiomas) e nele não existem partículas, e nem é possível se mover "pelo"$\mathbb{R}^3$. Um jeito mais preciso de formular isso é tratar o espaço físico como um conjunto abstrato chamado de "espaço afim"e posteriormente fazer a associação entre este espaço e o $\mathbb{R}^3$, que seria entendido como a escolha de um sistema de coordenadas (ou referencial). Como o uso desta expressão é recorrente, preferiu-se mantê-la.

Substitua q por f de volta e obteremos $f'^2 - f^2$, a menos de constantes multiplicando, ou se tivermos $k = m = 2$ (não foi à toa que obtivemos a equação de movimento do oscilador harmônico depois de termos operado com a equação de Euler-Lagrange).

Este resultado interessante não vale apenas para uma partícula, mas para um número N arbitrário delas. As funções q não precisam ser coordenadas cartesianas, esféricas ou qualquer coisa específica, podem ser qualquer parâmetro que determine a posição da partícula. Se não tivermos nenhuma restrição [vínculo] para o movimento delas, cada partícula fornecerá 7 variáveis para a lagrangiana (uma t, três q_i e três $\dot{q}_i$), assim, com N partículas, nossa lagrangiana estará definida num aberto de $\mathbb{R}^{7N}$. Por isso, nunca mais pense que se importar com espaços de dimensão n arbitrária é coisa de matemático que não tem utilidade! Caso uma partícula esteja restrita [vinculada] a uma linha por exemplo, então apenas um parâmetro será suficiente para descrever sua posição. Caso estiver restrita a uma superfície, serão necessários dois parâmetros, e assim por diante.

Mas, afinal de contas, qual é a vantagem do formalismo lagrangiano? A vantagem mais aparente é que lidar com problemas mais complexos se torna mais fácil. Para começar, a lagrangiana é uma função escalar - isto nos permite evitar trabalhar com vetores de $\mathbb{R}^3$, que é mais oneroso. Também nos permite pular a etapa de conseguir um diagrama de forças (em muitas situações, as forças envolvidas são bem complicadas): a equação de movimento sai "de graça"bastando saber a energia cinética e potencial. Uma vantagem mais sutil é de que q não precisa ser as coordenadas cartesianas, pode ser qualquer sistema de coordenadas. Isto se torna especialmente relevante quando a simetria do problema nos obriga a trabalhar com coordenadas curvilíneas. Esta é a razão pela qual as funções q costumam ser chamadas de "coordenadas generalizadas". [na verdade, o que está por trás disso é que a lagrangiana é definida no espaço de configuração, que é uma variedade, o que a torna invariante por transformações arbitrárias de coordenadas. O espaço de configuração não é nada mais do que o conjunto de todas as posições possíveis que as partículas do sistema podem tomar]. Por fim (mas creio que o mais importante), o formalismo lagrangiano é a linguagem adequada para formular o Teorema de Noether, um dos resultados mais importantes de toda a física, que correlaciona simetrias da lagrangiana com quantidades conservadas (como momento linear, angular e energia).

6 O Problema da Geodésica, noções de Geometria Diferencial e um nada de Relatividade Geral [4]

Nesta seção iremos estudar o problema da geodésica. Este problema consiste no seguinte:

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície [ou $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade de dimensão k - não se preocupe com o conceito formal de uma subvariedade, enxergue intuitivamente como a generalização do conceito de superfície com dimensão arbitrária. Além disso, não se assuste quando mencionarmos $\mathbb{R}^n$, você pode substituir n por 2 se isso te fizer feliz]. Dados dois pontos $p_1, p_2 \in M$, queremos achar a curva $\gamma : [a, b] \to M$ regular [5] de classe $\mathcal{C}^1$ que os conecte, ou seja $\gamma(a) = p_1, \gamma(b) = p_2$ e tenha o comprimento mínimo. Enfatizamos que a curva deve estar inteiramente contida na superfície, pelo contrário a solução seria trivial (reta). Antes de prosseguirmos, convém definirmos algo que será essencial neste problema, o conceito de plano tangente.

Dado um ponto $p \in M$, denotamos por T_pM o plano tangente a M no ponto p (se M for uma superfície de dimensão maior [uma subvariedade], será usado o termo "espaço tangente", no lugar de "plano". Eventualmente as duas nomenclaturas podem se confundir ao longo do texto, mas a essência é a mesma). Podemos pensar em um plano tangente a um ponto como o conjunto de vetores tangentes a M neste ponto. [T_pM será um subespaço de $\mathbb{R}^n$, de mesma dimensão que M sendo que o vetor nulo coincidirá com o ponto p, isto é, se pensarmos em vetores geometricamente como setas ligadas a pontos, todas as setas estarão ligadas a p, e não na origem do sistema de coordenadas]. Esta definição parece circular, e de fato não é nada formal. Uma definição mais razoável seria a seguinte: $T_pM = \{\gamma'(0); \gamma : I \to M \text{derivável}, 0 \in I, \gamma(0) = p\}$. Em palavras: o plano tangente é o conjunto dos vetores tangentes a todas as curvas γ deriváveis contidas em M que passam pelo ponto p.

Agora definimos nosso funcional: $l : X \to \mathbb{R}$, onde $X := \{\gamma : [a, b] \to M, \text{de classe } \mathcal{C}^2, \gamma(a) = p_1, \gamma(b) = p_2, \gamma'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]\}$, que a cada curva apropriada ao problema associará seu comprimento, isto é:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$$

Sigamos com nossa abordagem usual e comecemos achando os pontos críticos de l. Neste caso, como

[4] Nesta seção, o uso de Álgebra Linear crescerá substancialmente.

[5] Uma curva regular é uma curva cujo vetor tangente nunca se anula. Permitir este tipo de curva nos traria problemas: a imagem de curvas regulares podem até fazer "bicos"! Mas o principal motivo de fato é que vetores tangentes não nulos serão essenciais para a resolução do problema, como será visto.

estamos numa superfície, não funcionará aplicar as equações de Euler-Lagrange diretamente. Em vez disso, utilizaremos o procedimento que foi usado para obter as equações, fazendo as devidas modificações.

Considere uma variação γ_s de γ tal que $\gamma_s \in X, \forall s$. Como sempre, $v(t) = \frac{d}{ds}\gamma_s(t)|_{s=0}$ é o campo variacional, e valerá que $v(a) = v(b) = 0$, como pode ser facilmente visto. Além do mais, vale que $v(t) \in T_{\gamma(t)}M, \forall t \in [a,b]$, ou seja, o vetor do campo variacional em cada ponto é tangente a este ponto com relação à superfície. Com efeito, fixando um t e deixando variar s temos uma curva $f_t(s) := H(s,t)$ contida em $M, \forall s$, tal que $f_t(0) = \gamma_0(t) = \gamma(t)$. Por definição de espaço tangente, temos que $\frac{d}{ds}f_t(s)|_{s=0} \in T_{f_t(0)}M = T_{\gamma(t)}M$. Notando que $\frac{d}{ds}f_t(s)|_{s=0} = \frac{d}{ds}\gamma_s(t)|_{s=0} = v(t)$, concluímos que $v(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Mas será que vale a recíproca? Isto é, será que, dada uma função $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, com $v(a) = v(b) = 0$ e tal que $v(t) \in T_{\gamma(t)}M, \forall t \in [a,b]$, ela é o campo variacional de alguma variação? A resposta é sim, mas não é nada trivial. Diferentemente do jeito que foi argumentado no caso anterior, não funciona tomar $\gamma_s(t) = \gamma(t) + sv(t)$ pois nada garante que esta curva continua na superfície.

Daremos aqui apenas a ideia da demonstração desse fato. Para tanto, afirmamos que, dado um compacto[6] $K \subset M$, existe um aberto U (em geral, que não está contido na superfície) tal que $K \subset U$ e uma função $p : U \to M$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(x) = x, \forall x \in K$. Em palavras, dado um pedacinho K da superfície, existe um região U em volta da superfície que contém o pedacinho K e uma função p que projeta, ou seja, esmaga todos os pontos de U até ficarem contidos da superfície e de forma que deixe K invariante[7]. Apenas para exemplificarmos, tomemos a esfera unitária $M = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x|| = 1\}$. Daí podemos tomar $p(x) = \frac{x}{||x||}$. Voltando à questão principal, dada uma função v satisfazendo as características citadas anteriormente, pode ser demonstrado que esta função será campo variacional da variação dada por $p(\gamma(t) + sv(t))$. A função p garante que as curvas ficarão na superfície.

Ora, se γ_s é uma variação de γ e γ é um mínimo de l, então $\frac{d}{ds}l(\gamma_s)|_{s=0} = 0$. Vamos calcular $\frac{d}{ds}l(\gamma_s)$:

$$\frac{d}{ds}l(\gamma_s) = \frac{d}{ds}\int_a^b ||\gamma'(t)||dt = \int_a^b \frac{d}{ds}||\gamma'(t)||dt$$

Lembrando que (verifique!):

$$\frac{d}{ds}||x(s)|| = \frac{x(s) \cdot x'(s)}{||x(s)||}$$

$$\implies \frac{d}{ds}l(\gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b \frac{\gamma_s'(t) \cdot \frac{d}{ds}(\gamma_s'(t))}{||\gamma_s'(t)||}dt|_{s=0} = \int_a^b \frac{\gamma'(t) \cdot v'(t)}{||\gamma_s'(t)||}dt$$

Usando o truque da regra do produto (como sempre):

$$\implies \frac{d}{ds}l(\gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} \cdot v(t)\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}\right) \cdot v(t)dt$$

O primeiro termo se anula usando o teorema fundamental do cálculo e lembrando que $v(a) = v(b) = 0$. Finalmente:

$$-\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}\right] \cdot v(t)dt = 0$$

Para todo $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ com $v(a) = v(b) = 0$ e $v(t) \in T_\gamma(t)M, \forall t$.

Chegou a hora de enunciarmos outro:

Lema 2. *Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade, $\gamma : [a,b] \to M$ uma curva de classe $\mathcal{C}^1$ e $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua. Se*

$$\int_a^b u(t) \cdot v(t)dt = 0$$

para todo $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $v(a) = v(b) = 0$ e $v(t) \in T_{\gamma(t)}M$, $\forall t \in [a,b]$, então $u(t) \in (T_{\gamma(t)}M)^\perp$, $\forall t \in [a,b]$.[8]

Concluímos então que: se $\gamma : [a,b] \to M$ minimiza l, então:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}\right] \perp T_{\gamma(t)}M, \forall t \in [a,b] \tag{18}$$

[6] Em $\mathbb{R}^n$, isso equivale a um subconjunto fechado e limitado

[7] Na linguagem adulta da matemática, isto tem a ver com a vizinhança tubular de uma variedade

[8] $V^\perp$ indica o complemento ortogonal de um espaço vetorial V. Para os menos familiarizados com Álgebra Linear, $u \in V^\perp \iff u \perp v, \forall v \in V$

A equação acima é conhecida como Equação da Geodésica. Podemos supor que a curva é parametrizada por comprimento de arco, isto é, parametrizada de forma que $||\gamma'(t)|| = 1$, $\forall t \in [a, b]$. Fazer isso não perde generalidade pois reparametrizações não mudam o comprimento de arco, e portanto não interferem no funcional l. Para curvas parametrizadas por comprimento de arco, a equação (18) se torna:

$$\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M, \forall t \in [a, b] \tag{19}$$

Segue que, se uma curva é parametrizada por comprimento de arco e se minimiza l, então a curva satisfaz a equação (19). Isso motiva a seguinte;

Definição 4. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície (ou $M \subset \mathbb{R}^n$ uma subvariedade), então uma curva $\gamma : [a, b] \to M$, é dita geodésica se $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M, \forall t \in [a, b]$

Coloquialmente, as pessoas costumam utilizar geodésica para se referirem à curvas que minimizam o comprimento entre dois pontos. Mas, de acordo com a definição acima, uma geodésica não necessariamente possui esta propriedade, como veremos adiante. Na verdade, há algumas definições diferentes para geodésica e que são comuns. Veremos outra depois de darmos uma breve introdução sobre derivada covariante.

Da definição, segue a propriedade enunciada no seguinte:

Corolário 2. *Se γ é geodésica, então $||\gamma'(t)||$ é constante.*

Demonstração. Perceba que

$$\frac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = \frac{d}{dt}[\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)] = 2\gamma''(t) \cdot \gamma'(t)$$

Lembre-se de que $\gamma'(t)$ pertence a $T_{\gamma(t)}M$, enquanto que, pela hipótese de ser γ uma geodésica, temos $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$, donde $\gamma''(t)$ é perpendicular a $\gamma'(t)$, $\forall t$. Portanto, $\frac{d}{dt}||\gamma'(t)||^2 = 0$, donde $||\gamma'(t)||^2$ é constante e consequentemente $||\gamma'(t)||$. ■

No caso de ser $||\gamma'(t)||$ uma constante, dizemos que γ é parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco, ou ppca.

Acabamos de mostrar que se uma curva $\gamma : [a, b] \to M$ minimiza o funcional comprimento l e se γ é ppca, então γ é geodésica. De fato, por γ minimizar l, vale que γ satisfaz a equação (18). Uma vez que γ é ppca, $||\gamma'(t)|| = k \in \mathbb{R}$, donde $\frac{d}{dt}(\gamma(t)/||\gamma'(t)||) = \frac{1}{k}\frac{d}{dt}\gamma'(t) = \frac{1}{k}\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$, o que implica que $\gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)}M$.

Passemos a um exemplo concreto. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma esfera. Uma curva em M é chamada de *grande círculo* se é a intersecção da esfera com um plano que passa pela origem da esfera. Vale que se γ é uma parametrização ppca de um grande círculo, então γ é geodésica da esfera. Para provarmos isto, basta vermos que γ satisfaz (19).

7 Mais um pouco de Mecânica Clássica

Em breve (ou talvez não).